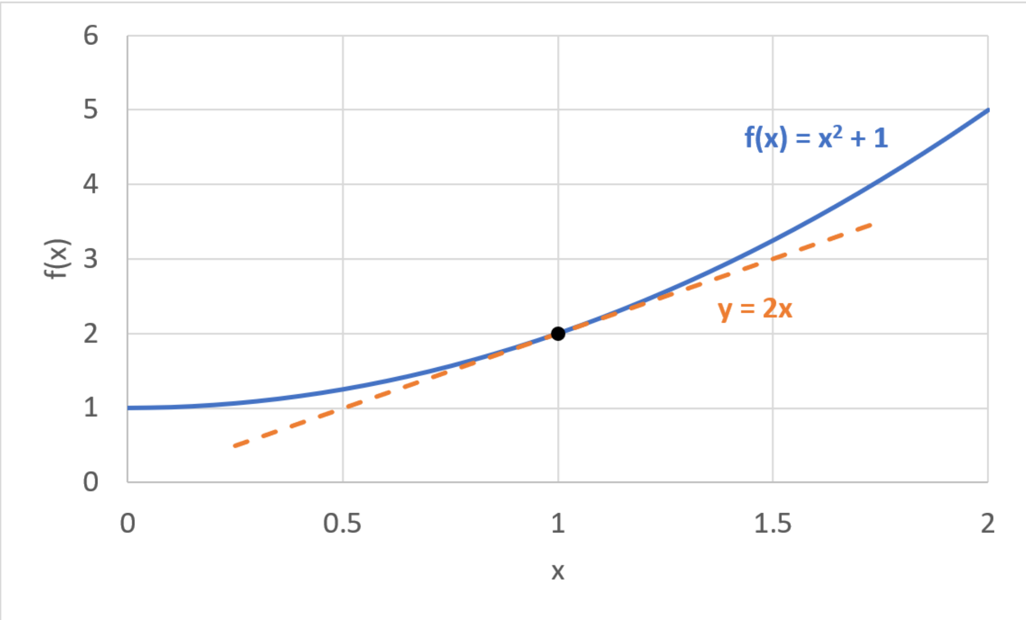
Jak modelować epidemię?
2. Pochodne i ich własności
materiały do ćwiczeń

Projekt „Matematyka dla ciekawych świata”
spisali: Piotr Morawiecki i Maria Gokieli
zadania pochodzą z różnych źródeł, w szczególności:
James Stewart, Calculus, Metric version 8E.

kwiecień 2022

1 Podsumowanie wykładów 2 i 3

Pochodna opisuje szybkość wzrostu funkcji. Można ją zdefiniować jako współczynnik kierunkowy stycznej do funkcji w danym punkcie. Na przykład na Rysunku 1 możemy zauważyć, że pochodna funkcji $f(x) = 1 + x^2$ w punkcie $x = 1$ jest przez współczynnik kierunkowej stycznej do wykresu w tym punkcie, który wynosi 2. Przykładając linijkę możesz sprawdzić, że współczynnik ten będzie się zwiększać wraz z x.



Rysunek 1: Ilustracja stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 1 + x^2$ w punkcie $x = 1$.

Matematycznie pochodną tę można wyrazić z wykorzystaniem tzw. granicy:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

Pochodne można także zapisać jako $f'(x)$ lub $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$.
Na wykładzie wyprowadziliśmy pochodne następujących funkcji:

- pochodna stałej
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a = 0$$
- pochodna funkcji liniowej
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax+b) = a$$
- pochodna funkcji potęgowej
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$$
- pochodna funkcji wykładniczej
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^x\right) = e^x$$

Gdzie a, b i n to dowolne stałe, natomiast e to liczba Eulera wprowadzona na pierwszym wykładzie. Także wyprowadziliśmy następujące własności pochodnych:

- pochodna funkcji pomnożonej przez stałą a
$$(af(x))' = af'(x)$$
- pochodna sumy dwóch funkcji
$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$
- pochodna iloczynu dwóch funkcji
$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
- pochodna funkcji złożonej
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

Korzystając z tych własności możemy obliczyć pochodne nawet skomplikowanych funkcji, na przykład:

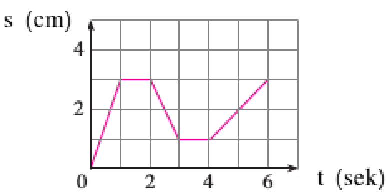
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(xe^{x^2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)\,e^{x^2} + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{x^2}\right) = e^{x^2} + xe^{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\right) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$$

Gdzie kolejno wykorzystaliśmy wzór na pochodną iloczynu dwóch funkcji (w przypadku $x\cdot e^{x^2}$) i na pochodną funkcji złożonej (w przypadku e^{x^2}).

2 Interpretacja geometryczna pochodnej

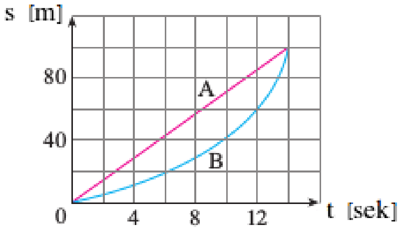
Zadanie 1

Wykres przedstawia drogę pokonywaną przez ludzika lego, którym bawi się Antek, przesuwając go wzdłuż zbudowanego prostego traktu. Kiedy ludzik porusza się w prawo? w lewo? Kiedy stoi? Naszkicuj wykres jego prędkości.



Zadanie 2

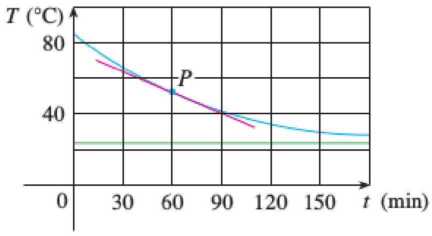
Wykres przedstawia drogę pokonywaną przez dwóch biegaczy A i B.



1. Opisz i porównaj, w jaki sposób biegną biegacze.
2. W którym momencie dzieli ich największa odległość?
3. W którym momencie mają tę samą prędkość? Uzasadnij.

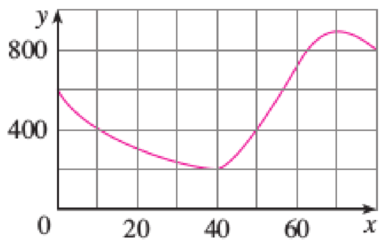
Zadanie 3

Krysia wyjęła pieczeń z piekarnika nagrzanego do 85°C i postawiła go na stole w pokoju o temperaturze 24°C. Wykres przedstawia proces nieuchronnego stygnięcia pieczeni do temperatury pokojowej. Oszacuj prędkość stygnięcia pieczeni po godzinie, odczytując nachylenie stycznej.



Zadanie 4

Podany jest wykres funkcji f.



1. Jak jest średnie tempo zmiany funkcji f na przedziale $[20, 60]$?
2. Wskaż przedział, na którym średnie tempo zmiany funkcji wynosi 0.
3. Na którym przedziale średnie tempo zmiany funkcji jest większe, $[40, 60]$ czy $[40, 70]$?
4. Oblicz $\dfrac{f(40) - f(10)}{40 - 10}$. Co ta wartość oznacza geometrycznie, na wykresie?

Zadanie 5

Dla funkcji f z poprzedniego zadania: ile może wynosić $f'(50)$? Czy $f'(10) > f'(30)$? Czy $f'(60) > \dfrac{f(80) - f(40)}{80 - 40}$? Wytłumacz, narysuj.

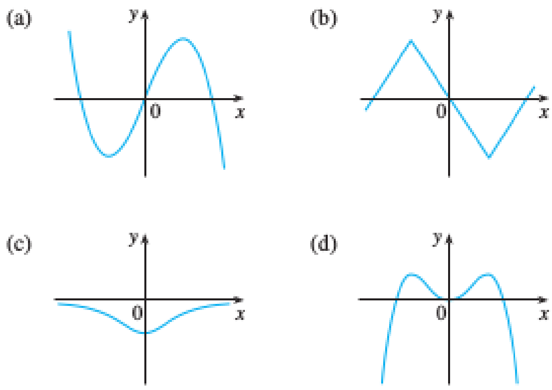
3 Pochodna jako funkcja

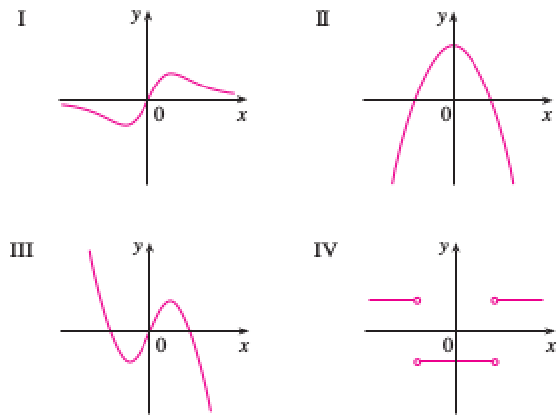
Zadanie 6

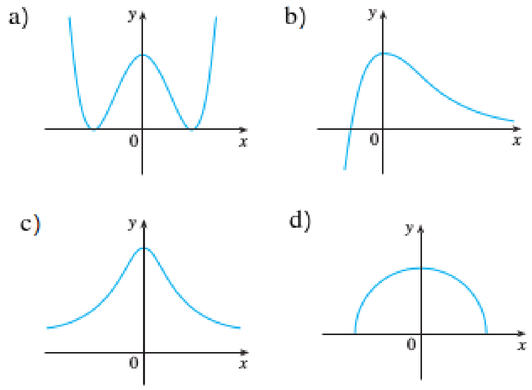
Dopasuj wykresy funkcji (a)-(d) do wykresów ich pochodnych I-IV.

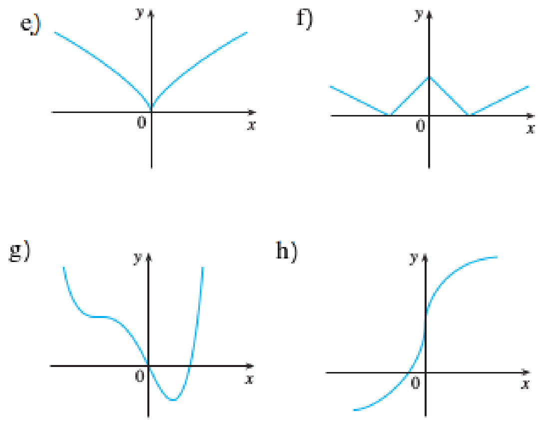
Zadanie 7

Narysuj wykresy pochodnych danych funkcji rysując wcześniej kilka stycznych do ich wykresów. Zacznij od wyznaczenia miejsc, gdzie pochodna wynosi zero.



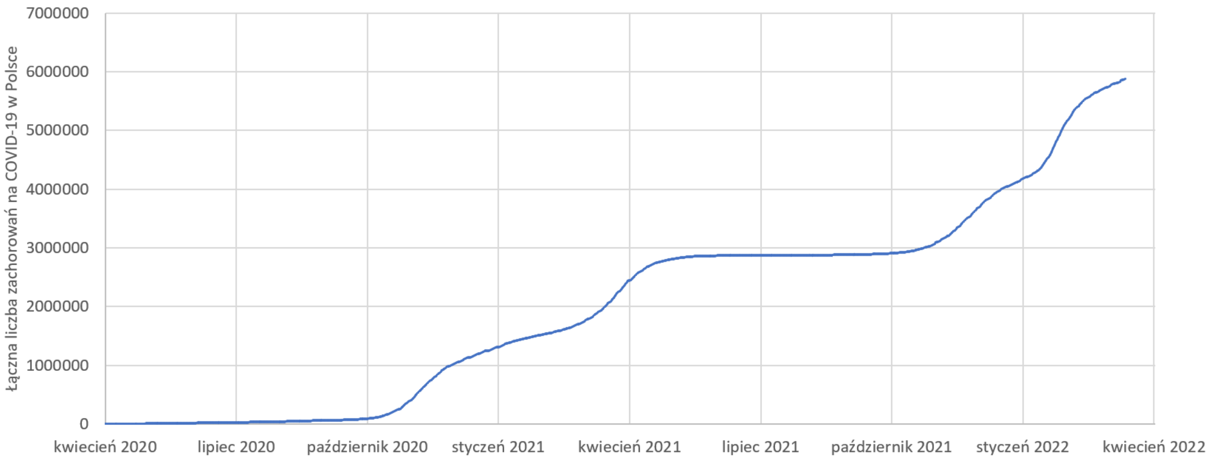






Zadanie 8

Poniższy wykres przedstawia łączną liczbę zachorowań w Polsce od początku pandemii jako funkcję w czasie, $N(t)$. Naszkicuj wykres pochodnej $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ (nie musisz umieszczać osi na osi pionowej). Co obserwujesz? Jaka jest interpretacja tej wielkości?

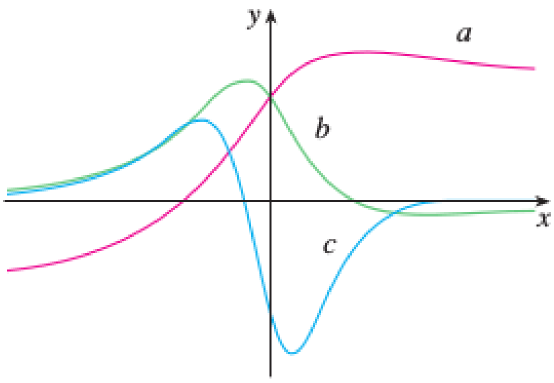


Kolejne pochodne jako funkcje

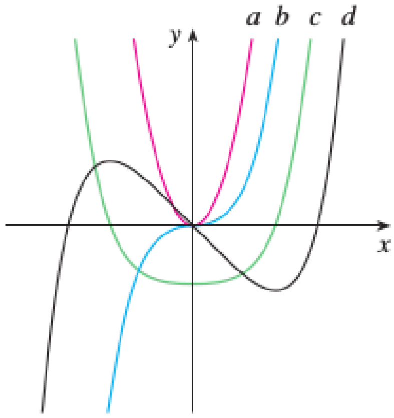
Zadanie 9

i) Wykres przedstawia wykres funkcji f, f', f''. Która jest która? Wyjaśnij dlaczego.

ii) Wykres przedstawia wykres funkcji f, f', f'', f'''. Która jest która? Wyjaśnij dlaczego.



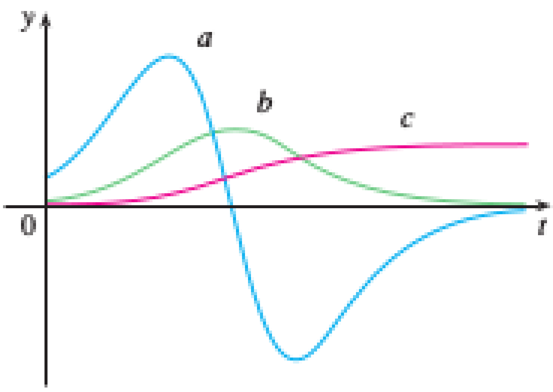
(i)



(ii)

Zadanie 10

Wykres przedstawia drogę przebytą przez pewien samochód, jego prędkość i przyspieszenie. Co jest czym? Wyjaśnij dlaczego.



4 Obliczanie pochodnych funkcji

Zadanie 11

Położenie ciała poruszającego się w ruchem jednostajnie przyspieszonym jest wyrażona jako następująca funkcja czasu:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

gdzie x_0, v_0 i a to pewne stałe parametry.

Oblicz prędkość ciała jako pochodną położenia $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ oraz przyspieszenie ciała jako pochodną prędkości $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Co obserwujesz? Jaka jest interpretacja parametrów występujących w równaniu.

Zadanie 12

Oblicz pochodną $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ następujących funkcji:

1. $f(x) = 3x^3$
2. $f(x) = x^3 - x^2$
3. $f(x) = 3xe^x$
4. $f(x) = e^{x^3 - x^2}$
5. $f(x) = 2\sqrt{x}$
   Wskazówka: $\sqrt[n]{x}$ można zapisać jako $x^{1/n}$
6. $f(x) = x^2\sqrt{e^x + \frac{1}{x}}$
7. $f(x) = 2^x$ (*)
   Wskazówka: Spróbuj przekształcić 2 w potęgę o podstawie e
8. $f(x) = \ln x$ (*)
   Wskazówka: Zastanów jaka jest zależność między funkcją $f(x) = \ln x$ i $g(x) = e^x$. Spróbuj wykorzystać definicję pochodnej (lub jej geometryczną interpretację), żeby znaleźć zależność między pochodną $f'(x)$ i $g'(x)$.

(*) zadania dla ambitnych

Zadanie 13

Wyprowadź wzór na pochodną ilorazu funkcji:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) + f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Wskazówka: Wykorzystaj wcześniej poznane własności pochodnych.

Zadanie 14

W jednym z zadań z poprzednich zajęć dokonaliśmy obserwacji, że liczbę e można zapisać przy pomocy nieskończonej sumy jako:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Zauważyliśmy, że kolejne wyrazy dają coraz mniejszy wkład do sumy. Co ciekawe funkcję $f(x) = e^x$ można zapisać w podobny sposób jako następujący nieskończony wielomian:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Wykorzystaj tę postać funkcji wykładniczej, żeby pokazać, że $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = e^x$.

Zadanie 15 – rozpad promieniotwórczy

Zmianę liczby pierwiastków promieniotwórczych w czasie opisuje funkcja wykładnicza:

$$n(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

gdzie N_0 to początkowa liczba pierwiastków, a λ to tzw. stała rozpadu promieniotwórczego.

1. Oblicz pochodną funkcji $n'(t)$ i spróbuj ją wyrazić za pomocą $n(t)$. Jak można otrzymane w ten sposób równanie objaśnić?

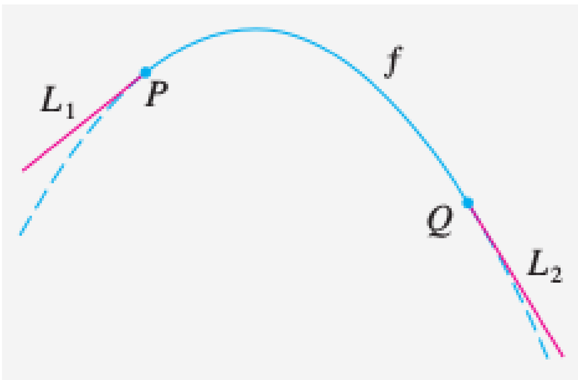
2. Uran ^{238}U podczas rozpadu promieniotwórczego alfa przemienia się w tor ^{232}Th, który w dużo krótszym czasie ulega rozpadowi do radu ^{228}Ra. Jego ilość w czasie można przybliżyć funkcją:

$$n(t) = \frac{a}{\lambda} + be^{-\lambda t}$$

   Gdzie a i b to pewne stałe. Oblicz pochodną funkcji $n'(t)$ i spróbuj ją wyrazić za pomocą $n(t)$. Jaką interpretację mają poszczególne człony w otrzymanym w ten sposób równanie?

Zadanie 16 – roller-coaster

Jako osobę zorientowaną w matematyce, poproszono Cię o zaprojektowanie trasy kolejki w nowym parku rozrywki obok Twojego domu. Po przejrzeniu fotografii takich tras, decydujesz, że nachylenie przy wznoszeniu wyniesie 0.8, a nachylenie spadku −1.6. Postanawiasz połączyć te dwa proste odcinki $y = L_1(x)$ i $y = L_2(x)$ kawałkiem paraboli o wzorze $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie x i $f(x)$ mierzone są w metrach. Aby tor był gładki, nie mogą występować nagłe zmiany kierunku, więc chcemy, aby odcinki L_1 i L_2 były styczne do paraboli w punktach przejściowych P i Q (zobacz rysunek).



Aby uprościć równania, postanawiasz umieścić początek układu współrzędnych w punkcie P.

1. (a) Załóżmy, że odległość w poziomie między punktami P i Q wynosi 30 m. Napisz równania, jakie muszą spełniać parametry a, b i c, by tor był gładki w punktach przejściowych (tzn. by odcinki L_1 i L_2 były styczne do paraboli w tych punktach).
   (b) Rozwiąż równania z części (a), aby znaleźć wzór na $f(x)$.
   (c) Narysuj wykres L_1, f oraz L_2, aby sprawdzić, czy przejścia wyglądają płynnie.
   (d) Znajdź różnicę wysokości między punktami P i Q.

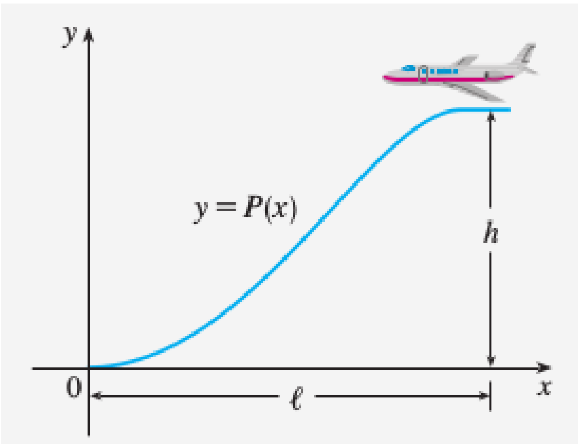
2. Rozwiązanie z punktu 1 może *wyglądać* na gładkie, ale nikt nie *odczuje* tej gładkości, ponieważ funkcja złożona z $L_1(x)$ dla $x \le 0$, $f(x)$ dla $0 < x < 30$, oraz $L_2(x)$ dla $x \ge 30$ nie ma ciągłej drugiej pochodnej! Zatem pomimo, że nie ma zmian kierunku, odczujemy zmiany przyspieszenia, czyli szarpnięcia w punktach P i Q. Aby jednak zapisać się pozytywnie w pamięci sąsiadów, postanawiasz poprawić projekt przez użycie funkcji kwadratowej $q(x) = ax^2 + bx + c$ tylko na przedziale $3 < x < 27$, łącząc ją z funkcjami liniowymi za pomocą dwóch funkcji sześciennych:

$$t(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n, \quad 0 < x \le 3, \qquad h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \quad 27 \le x < 30.$$

   (a) Napisz układ równań na 11 niewiadomych, który zapewni, że funkcje i ich dwie pierwsze dwie pierwsze pochodne są zgodne w punktach przejściowych.
   (b) (**) Rozwiąż równania z części (a) z pomocą komputera, aby znaleźć wzory na $q(x)$, $t(x)$, $h(x)$.
   (c) (**) Narysuj wykresy L_1 , t, q, h i L_2 , a następnie porównaj je z wykresem z części 1c.

Zadanie 17 - gdzie pilot powinien rozpocząć lądowanie?

Na rysunku pokazano ścieżkę podejścia do lądowania samolotu. Spełnia ona następujące warunki:



(i) Gdy zniżanie rozpoczyna się, wysokość samolotu wynosi h, a odległość w poziomie wynosi ℓ, licząc od miejsca zetknięcia z ziemią, które przyjmujemy jako początek układu współrzędnych.

(ii) Pilot musi utrzymywać stałą prędkość poziomą v przez cały czas zniżania.

(iii) Wartość bezwzględna przyspieszenia pionowego nie powinna przekraczać stałej k (która jest znacznie mniejsza niż przyspieszenie ziemskie).

1. Znajdź wielomian sześcienny $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, który spełnia warunek (i), nakładając odpowiednie warunki na $P(x)$ i $P'(x)$ w punkcie rozpoczęcia opadania i w punkcie lądowania.

2. (*) Korzystając z warunków (ii) i (iii), pokaż, że

$$\frac{6hv^2}{\ell^2} \le k.$$

3. Załóżmy, że linia lotnicza postanowiła nie dopuszczać, aby przyspieszenie pionowe samolotu przekraczało $k = 1\,385$ km/h^2. Jeśli wysokość przelotowa samolotu wynosi 11 000 m, a prędkość 480 km/h, w jakiej odległości od lotniska pilot powinien rozpocząć zniżanie?

4. Wykreśl, z pomocą komputera, ścieżkę podejścia, jeśli spełnione są warunki podane w punkcie 3.

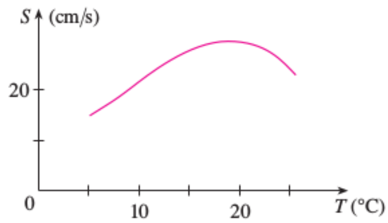
5 Proponowane zadania domowe

Uwaga: Poniższe zadania są proponowane jako zadania domowe, ale prowadzący może wybrać inne zadania jak praca domowa i zaproponować inny rozkład punktacji. Możecie oddać prowadzącemu rozwiązania wszystkich lub tylko części zadań domowych. Maksymalna liczba punktów, którą można zdobyć w każdym tygodniu wynosi 6. Powodzenia!

Zadanie 18 (1 punkty)

Wykres przedstawia wpływ temperatury wody na prędkość osiąganą przez kiżucze (gatunek ryb łososiowatych).

1. Jakie jest znaczenie pochodnej $S'(T)$? W jakich jednostkach będziemy ją mierzyć?
2. Oszacuj $S'(15)$ oraz $S'(25)$, podaj interpretację tych wartości.



Zadanie 19 (2 punkty)

Oblicz pochodną funkcji:

1. $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$
2. $f(x) = x^2 e^x + 2$

Zadanie 20 (3 punkty)

W pewnych warunkach plotki rozprzestrzeniają się zgodnie z równaniem

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

gdzie $p(t)$ jest częścią (ułamkiem) populacji, która usłyszała plotkę w czasie t, a a i k to pewne stałe dodatnie.

1. Do jakiej liczby dąży $p(t)$, gdy czas t staje się coraz większy i większy? (Inaczej mówiąc: szukamy $\lim_{n\to\infty} p(t)$). Czy zależy to od stałych a i k?
2. Z jaką prędkością rozprzestrzenia się plotka?
3. Przyjmij $a = 10$ i $k = 0,5$. Czas t mierzymy w godzinach. Jak długo zajmie plotce dotarcie do 80% populacji?
4. Dla a i k jak wyżej, narysuj wykres funkcji p i na podstawie wykresu oceń, czy Twoje obliczenia są prawidłowe.